a

全國紙上談話会　第22号　1934年　12月

65　單葉函数ニ於ケル廻轉定理ニ就テ

阪大工學部　城憲三

§1　函数 $s(z)=z+a_2z^2+\cdots$ ガ單位円内 $|z|<1$ デ正則單葉デアルトシコノ Klasse ノ函数ヲ $\mathfrak{S}$ トスル。$\mathfrak{S}$ ノ Unterklasse ノ函数族トシテ星型函数，凸型函数アリ。コレラヲ $\mathfrak{S}t$, $\mathfrak{K}$ トスル。明カニ

$$\mathfrak{S} \supset \mathfrak{S}t \supset \mathfrak{K}$$

I　$k(z) \subset \mathfrak{K}$ ナルトキハ既ニ知ラレル様ニ

$$|\arg k'(z_0)| \leqq 2 \arcsin r, \qquad |z_0| \leqq r < 1$$

等号ハ $k(z)=\frac{z}{1-\varepsilon z}$ $(|\varepsilon|=1)$ ナル函数ニヨッテ到達サレル。[例ヘバ Strohhäcker, Math. Zeitschr., 37, 1933 参照]

II　$st(z) \subset \mathfrak{S}t$ ナルトキハ

$$(1) \qquad |\arg st'(z)| \leqq 4 \arcsin r, \qquad |z_0| \leqq r \leqq \frac{\pi}{8}$$

ニシテ等号ハ $st(z)=\frac{z}{(1-\varepsilon z)^2}$ $(|\varepsilon|=1)$ ナル函数ニヨッテ到達サレルコトガ分ッテヰル。[Marx, Math. Annalen, 107, 1933, S. 66]

III　$s(z) \subset \mathfrak{S}$ ナルトキハ

$$(2) \qquad |\arg s'(z_0)| \leqq \varphi(r), \qquad |z_1| \leqq r, < 1$$

ナル Schranke $\varphi(r)$. ガアルコトヲ初メテ述ベタノハ Bieberbach デアル。[Math. Zeitschr. Bd. 4, 1717 S. 295-305] ノ本稿ノ主要ナル目的ハ (1) ノ結果ヲ良クシ (2) ノ $\varphi(r)$ ヲ正確ニ求メルコトニアル。

<u>定理1</u>　$s(z) \subset \mathfrak{S}$ ナルトキハ

$$(3) \qquad \underset{|z_1| \leqq r}{|\arg s'(z_1)|} \leqq \sin\theta_0(r) \cdot \log\frac{1+r}{1-r} + 2\arctan\frac{r\sin\theta_0(r)}{1+r\cos\theta_0(r)}$$

ココニ $\theta_0(r)$ ハ

$$\psi(r,\theta) \equiv \sin\theta \cdot \log\frac{1+r}{1-r} + 2\arctan\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta} \quad (r<1)$$

ヲ Max. ナラシメル θ ノ値デアル。

且ツ (3) ノ等号ノ成立スル函数ハ γ ニ存在スル。

コノ定理ヲ証明スルタメニ現今マデノ結果ヲ述ベテ見タイ。

§2 Bieberbach ハ最初

$$(4) \qquad |\arg s'(z_0)| \leqq 2\log\frac{1+r}{1-r} \qquad (s(z)\subset\gamma)$$

ナルコトヲ示シタ。シカシ (4) ノ等号ノ成立シ得ル様ナ函数ハ γ ニ見ツカラナイ。ダカラ (4) ハ genaue Schranke ヲ與ヘナイ。シカシ $|\arg s'(z_0)|$ ヲ $K\log\frac{1+r}{1-r}$ $(K<2)$ ナル形デハ評價スルコトハ出来ナイ。ソレハ

$$s(z)=\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2} \quad \text{ナルトキ} \quad s'(z)=\frac{1+e^{i\alpha}z}{(1-e^{i\alpha}z)^3} \quad \text{デアッテ}$$

$$\log s'(z)=\log(1+e^{i\alpha}z)-3\log(1-e^{i\alpha}z)=4e^{i\alpha}z+\cdots$$

トナルカラ $\log$ ノ分枝ヲ $z=0$ ナルトキ 0 トナルモノトシテ $z=ire^{-i\alpha}$ トオケバ

$$\arg s'(z)=4r+\cdots,$$

而シテ
$$2\log\frac{1+r}{1-r}=4r+\cdots,$$

r ガ極メテ小ナルトキハ $k\log\frac{1+r}{1-r}$ $(k<2)$ デハ困ルカラデアル。又一方

$$s(z)=\frac{e^{(1+i)\log\frac{1+z}{1-z}}-1}{2(1+i)} \qquad (\subset\gamma)$$

ニ於テ z ガ実数値ヲトルトキ $z=r$ トシテ

$$\arg s'(z)=\log\frac{1+r}{1-r}$$

トナルカラ $K\log\frac{1+r}{1-r}$ $(K<1)$ デ評價スルコトモ出来ナイ。[Bieberbach a.a.O. 又ハ G. Julia, Leçon sur la représentation conforme des aires simplement connexes, p.97–98 参照]

最近ニ到リ M. Kössler ハ

$$(5) \qquad |\arg s'(z_0)|_{|z_0|\leq r} \leqq \int_0^r \frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2}\,dx$$

ナルコトヲ示シタ。[Jahresbericht d. D.M.V. Bd. 41, 1932]

$$2\log\frac{1+r}{1-r}=\int_0^r\frac{4\,dx}{1-x^2}>\int_0^r\frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2}\,dx$$

デアルカラ (5) ハ (4) ノ結果ヨリハヨイガシカシ H. Grunsky ハ (5) モヌ genaue Schranke ヲ與フルモノデナイコトヲ示シタ。[Jahresbericht d. D. M. V. Bd 42, 1933]、 Késsler ハ (5) ヲ得テ後、再ビ (5) ヨリ更ニヨイ結果

$$(6) \qquad |\arg s'(z_0)| \leqq 2|a_2|r + \frac{3}{2} r \log \frac{1+r}{1-r}$$

ヲ発表シタ。[Těstn. české Spol. Nauk, 1932] シカシ (6) ハ $r=0$ ノミニ於テ scharf デ $r>0$ ナルトキハ scharf デハナイ。 $r > 0.8$ デハ (9), (6) ヨリハヨイ。

其後新シイ結果ナシニ今日ニ到ツテヰルノハ無念デアル。

§3 定理 1 ノ証明ヲ與ヘルタメ、ドウ云フ風ニ考ヘタカヲ述べヨウ。H Grunsky ガ彼ノ Dissertation [Schriften des mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin Bd. 1, 1932] デ証明シタ次ノ定理カラ出発スル。

<u>定理</u> (Grunsky) $s(z) \subset \gamma$ ナルトキハ

$$(7) \qquad \left|\log\frac{s(z_0)}{z_0} + \log(1-|z_0|^2)\right| \leqq \log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} \qquad |z_0|<1$$

コヽニ $\log\frac{s(z)}{z}$ ハ $z=0$ ノトキ 0 トナル分枝ヲトル。等号ハ函数

$$(8) \qquad s(z,z_0) = \frac{4z_0(1+|z_0|)^{2t} z}{(1-\bar{z}_0 z)^{1+t}\left[(w-w_2)(1-\overline{w}_2 w)^2 - (w+w_2)(1+\overline{w}_2 w)^2\right]^2}$$

$$w = \sqrt{\frac{z-z_0}{\bar{z}_0 z-1}}, \qquad w_2 - \sqrt{z_0}$$

ニヨツテノミ到達サレル。即チ $\log\frac{s(z_0)}{z_0} = -\log(1-|z_0|^2) + t\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}, \quad |t|=1$

[注意] (8) ハ γ ニ属シ $t=1$ ナルトキハ $\frac{z}{(1-\varepsilon z)^2}$, $t=-1$ ナルトキハ $\frac{z}{(1+\varepsilon z)^2}$ ($\varepsilon = \frac{|z_0|}{z_0}$) トナル。

上ノ定理ヲ便宜上次ノ様ニ書キカヘテオク。

<u>定理 A</u>

$$(9) \qquad \left|\log\frac{z_0}{s(z_0)} - \log(1-|z_0|^2)\right| \leqq \log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$$

等号ハ (8) ノ函数ニヨツテノミ成立シ

(10) $$\log\frac{z_0}{s(z_0)} = \log(1-|z_0|^2) - t\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} \quad 。\quad |t|=1$$

次ニ,ヨク知ラレタ Nevanlinna ノ Transformation ニヨツテ

$$h(z) = -\frac{s\left(\frac{-z+z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right)-s(z_0)}{s'(z_0)(1-|z_0|^2)} = z+\cdots \quad 。\quad |z|<1$$

トオケバ $h(z) \subset \gamma$ ニシテ $z=z_0$ ナルトキ次ノ関係ガアル。

$$h(z_0) = \frac{s(z_0)}{s'(z_0)(1-|z_0|^2)}, \quad h'(z_0) = \frac{1}{s'(z_0)(1-|z_0|^2)^2}$$

従ツテ

(11) $$\frac{z_0\cdot s'(z_0)}{s(z_0)} = \frac{1}{1-|z_0|^2}\cdot\frac{z_0}{h(z_0)}$$

(12) $$\frac{z_0}{s(z_0)} = (1-|z_0|^2)\frac{z_0 h'(z_0)}{h(z_0)}$$

之ノ二式ノ関係カラ,定理Aカラ次ノ定理ガ出ル。

定理 B $s(z)\subset\gamma$ ナルトキハ

(13) $$\left|\log\frac{z_0\cdot s'(z_0)}{s(z_0)}\right| \leqq \log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}, \quad |z_0|<1$$

ココニ $\log\frac{z\cdot s'(z)}{s(z)}$ ハ $z=0$ ナルトキ零トナル分枝ヲトル。

上ノ等号ハ函数

(14) $$s(z,z_0) = \frac{z_0}{(1-t|z_0|)^2}\left(\frac{(w-w_0)(1-\bar{w}_0 w)^{-t}+(w+w_0)(1+\bar{w}_0 w)^{-t}}{(w-w_0)(1-\bar{w}_0 w)^{-t}-(w+w_0)(1+\bar{w}_0 w)^{-t}}\right)^2,$$

$$w=\sqrt{z},\quad w_0=\sqrt{z_0}$$

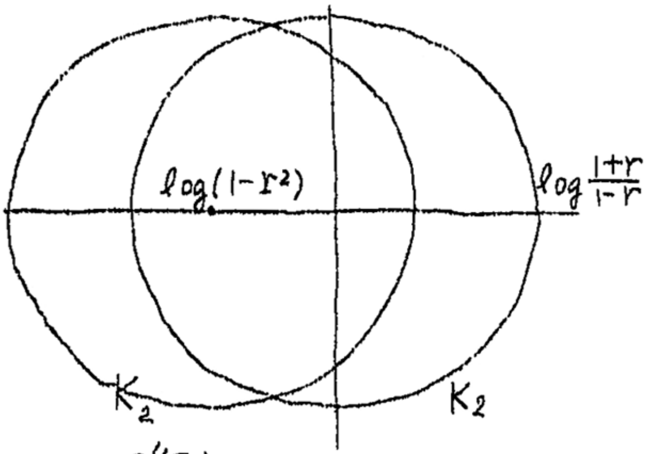
ニヨツテノミ成立シ

(15) $$\log\frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)} = t\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}, \quad |t|=1$$

デアル。

定理 A, B 間ニ上ノ如キ関係ガアツテ (8), (14) ノ両函数ハ互ニ他ニ Nevanlinna Transformation ヲ行ヘルモノデアル。

不等式(13)ハ γ ノ Sternschranke ヲ決定スルモノデアル。定理Aニヨツテ $s(z)\subset\gamma$ ナルトキ $\log\frac{z_0}{s(z_0)}$, $(|z_0|=r<1)$ ハ中心 $\log(1-r^2)$, 半径 $\log\frac{1+r}{1-r}$ ノ閉円 K_1 内ニアリ 周上ノ点ハ函数 (8)ニヨツテノミ取ラル。($|t|=1$ ニシテ $t=e^{i\theta}$ トオケバ $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ ナル θ ニ対シ周上ノ点ガ応ズルナリ)



デアルカラ K_1 ナル円ハ Rogosinski ノ意見デ $\log\frac{z_0}{s(z_0)}$ ノ Bildschranke ヲ与ヘルモノデアル。Marx ハ γ 族ノ凡テノ函数ニ対シテハ $\log\frac{z_0}{s(z_0)}$ ノ正確ナ Schranke ヲ与ヘタガ上ノ結果ハ得ラレナカツタ。[Marx a. a. O.]

又定理 B ニヨツテ $s(z)\subset\gamma$ ナルトキ $\log\frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}$ ハ原点ヲ中心トシ上ト同ジ半径 $\log\frac{1+r}{1-r}$ ノ閉円 K_2 内ニアリ周上ノ点ハ函数 (14) ニヨツテノミ取ラレル。

(12)ニヨレバ

$$\arg\frac{z_0}{s(z_0)}=\arg\frac{z_0 h'(z_0)}{h(z_0)}$$

デアツテ γ ノスベテノ函数ニ対スル $\left|\arg\frac{z_0}{s(z_0)}\right|$ 及ビ $\left|\arg\frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}\right|$ ノ Schranke ハ同一トナル。ソレハ $s(z)$ ガ γ 内ヲ動ケバ同時ニ $s(z)$ ノ Nevanlinna Transformation ニテ得ラレタ $h(z)$ モ γ 内ヲ一通リ動クカラデアル。之ニ着想シタノハ Marx デアツタ。[Marx a.a.O.] コノ定理ハ誤解サレ易イカラ注意シナケレバナラヌ。γ ノ函数 $s(z)$ ニ対シ

$$s(z)=\frac{z}{(1-\varepsilon z)^2},\quad s(z)=\frac{z}{(1+\varepsilon z)^2}\qquad(|\varepsilon|=2)$$

ナラザル限リ一般ニ

$$(16)\qquad \arg\frac{z_0}{s(z_0)}\neq\arg\frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}$$

デアル。

$$(17)\qquad \arg s'(z)=\arg\frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}-\arg\frac{z_0}{s(z_0)}$$

デアルカラ (16) ヲ無視シテ $\arg\frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}$, $\arg\frac{z_0}{s(z_0)}$ ガ同時ニソノ Max. Min ヲ取リ得ルモノノ如ク考ヘテイタツタノガ Bieberbach ノ (4) ノ導キ方デアツタ。即チコノ時ハ (17) ヨリ

$$|\arg s'(z_0)|\leqq\left|\arg\frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}\right|+\left|\arg\frac{z_0}{s(z_0)}\right|=2\log\frac{1+r}{1-r},\quad |z_0|=r,$$

デアルカラ我々ハ「$\log\frac{z_0}{s(z_0)}$ ガ K_1 内ヲウゴク時 $\log\frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}$ ガ K_2 ノ何処ニアル

f

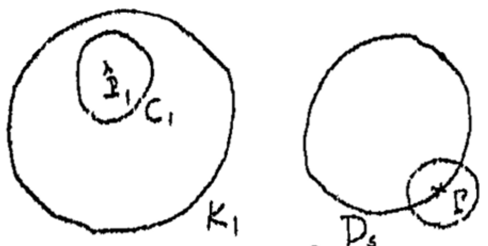
カヲ研究スレバヨイ。スルト(17)ノ関係ニヨツテ「$\arg\frac{z_0}{s(z_0)}$ ガ K_1 内ニ於テ変ルトキ $\arg\frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}$ ガ K_2 ノ何處ヲ動クカト云フコトヲ知ルコトニナル。コノタメニハ(17)ヨリ $|\arg s'(z)|$ ヲ評價スレバヨイ。

定理1ノ証明

$|\arg s'(z)|$ ヲ評價スルタメニハ $\log s'(z)$ $(s(z)\subset\gamma)$ ノ Bildschranke D_s ヲ知レバヨイ。定理Aニヨレバ $\log\frac{z_0}{s(z_0)}$ ノ Bildschranke ハ閉円 K_1 デアル。(17)ヨリ

$$\arg\frac{z_0}{s(z_0)}+\arg s'(z_0)=\arg\frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}$$

然ルニ D_s ノ境界点ノ値ヲ取ル函数ハ(S)ニ限ル。何故ナラ若シ然ラズ



トナルヲ見ル) 境界点 P ノ値ヲ取ル函数ヲ $f(z)$ トスレバ $(f(z)\subset\gamma)$ $\log\frac{z_0}{f(z_0)}$ ハ K_1 円ノ内点デアル。(定理A) コノ点ヲ P_1 トスル。P_1 ヲ中心トシテ極メテ小ナル円 C_1 ヲ考ヘ C_1 円内ノ値ヲトル函数群 $s(z)\subset\gamma$ ヲ考フレバ之等ノ $s(z)$ ニ於ケル $\log s'(z_0)$ ノ値ハ点 P ノ近傍ヲ全部覆フ。(嚴密ニハ連續性ヲ用ヒテ証セラレル) 従ツテ P ハ D_s ノ境界点トナリ得ナイコトニナルカラ假定ニ反スル。

ダカラ D_s ノ境界点ノ値ヲ取ル函数ハ(8)ニ限ル。($k(z)\subset\mathfrak{K}$ ナルトキ $\log k'(z)$ ノ Bildschranke ハ分ツテヰルガ γ, γ_{st} ニ対スル $\log s'(z)$ ノ Bildschranke D_s, D_{st} ハ未知デアル。コヽデハ D_s ノ虚数部分ノミヲ考フレバ足リル) 函数(8)ノ $|\arg s'(z)|$ ヲ評價スレバ $s(z)\subset\gamma$ ナル $s(z)$ ノ $|\arg s'(z)|$ ノ評價ニナル。

函数(8)ニ対シ $\frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}$ ヲ計算スレバ

$$(18)\qquad \frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}=\frac{1}{1-|z_0|^2}(1+t|z_0|)^2$$

($t=1$ ノトキハ $\frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}=\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$, $t=-1$ ノトキハ $\frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}=\frac{1-|z_0|}{1+|z_0|}$ トナルヲ見ル)

$\log\dfrac{z_0}{s(z_0)}$ $(s(z)\subset\gamma)$ ガ K_1 円周上ヲウゴケバ $\log s(z_1)$ ハ D ノ境界上ヲ動クコトニ注意スレバ (10), (18) ヨリ

$$|\arg s'(z)|\leqq \mathfrak{I}\left\{t\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}\right\}+\mathfrak{I}\left\{\log(1+t|z_0|)^2\right\}$$

$|z_0|=r$, $t=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ トオキ

$$(19)\qquad =\sin\theta\cdot\log\frac{1+r}{1-r}+2\arctan\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\equiv\varphi(r,\theta)$$

$\varphi(r,\theta)$ ヲ Max. ナラシメル θ ノ値ヲ $\theta_0(r)$ トスレバ

$$(3)\qquad \underset{|z|\leqq r}{|\arg s'(z_0)|}\leqq\sin\theta_0(r)\cdot\log\frac{1+r}{1-r}+2\arctan\frac{r\sin\theta_0(r)}{1+r\cos\theta_0(r)}$$

$$\lim_{r\to 0}\theta_0(r)=\frac{\pi}{2}$$

上ノ等号ハ函数 (5) ヨッテ到達サレル。 (証明終)

(19) ノ右辺ノ第一項, 第二項ハ夫々 $\leqq\log\frac{1+r}{1-r}$, $2\arcsin r$ デアルカラ

$$(20)\qquad |\arg s'(z_0)|\leqq\log\frac{1+r}{1-r}+2\arcsin r=4r+\cdots$$

(20) ハ (3) ヨリハ勿論悪イガ Bieberbach ノ結果 (4) ヨリハ遥カニヨイコトガ分カラウ。

5 <u>定理 2</u> $st(z)\subset\mathfrak{K}$ ナルトキハ

$$\underset{|z_0|\leqq r}{|\arg st'(z_0)|}\leqq 2\arcsin r+\frac{\pi}{2}$$

等号ハ $st(z)=\dfrac{z}{(1-\varepsilon z)^2}$ ニヨリテ到達サレル。

証明 既ニ §3 デ述ベタ様ニ $\log\dfrac{z_0}{st(z_1)}\prec\log(1-re^{i\varphi})^2$, $(r=|z_0|,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi)$

故ニ $\quad|\arg st'(z)|\leqq\left|\arg\dfrac{z_0}{s(z_0)}\right|+\left|\arg\dfrac{z_0\,s'(z_0)}{s(z_0)}\right|\leqq 2\arcsin r+\dfrac{\pi}{2}$

故ニ $st(z)\subset\mathfrak{K}$ ニ対シ

$$|\arg s'(z_0)|\leqq\left|\arg\frac{1+\varepsilon z_0}{(1-\varepsilon z_0)^3}\right|\leqq 2\arcsin r+\frac{\pi}{2},\quad r=|z_0|,$$

$r\to 1$ ナルトキハ $|\arg st'(z)|\leqq\dfrac{3\pi}{2}$

[証明終]

定理 A ノ応用トシテ K 級ノ単葉函数ノ拡張サレタル Verzerrungssatz 及ビ種々ナル単葉冪級数ノ係数問題ヲ論ジ新シイ結果ヲ述ベタイガ次回ニユズルコトニスル。定理 1, 定理 2 ハ新定理デアル。変ナ考ヘ違ヒヲシテヰルカモ知レズ皆様ノ御忠告ヲ切ニ切ニオ願ヒ申シアゲマス。

(11月28日受取)